TEMA NR. 2

SPAȚII VECTORIALE (LINIAR)

1. Fie S mulțimea tuturor șirurilor de numere reale. Dacă $\vec{x} \in S$ convenim să notăm șirul în forma
$$\vec{x} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots), \quad a_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, \dots, n, \dots$$
Arătați că S este spațiu vectorial infinit dimensional și precizați o bază în S.

2. Fie $m \subset S$ mulțimea șirurilor mărginite. Avem că $\vec{x} \in m$ dacă $\exists \ M_x > 0$ astfel încât $|a_i| \leq M_x$, oricare ar fi $i \in \mathbb{N}^*$.
Să se arate că m este subspațiu liniar al spațiului vectorial S. Precizați dimensiunea și o bază.

3. Se notează cu C mulțimea șirurilor numerice convergente și cu C_0 mulțimea șirurilor de numere reale convergente la 0. Să se arate că $C_0 \subset C \subset m \subset S$ și că C_0 este subspațiu liniar al spațiului liniar C care la rându-i este subspațiu liniar al lui m.

4. Să se găsească combinația liniară $3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + 7\vec{u}_3$ unde $\vec{u}_1 = (3, 1, -7, 4) \in \mathbb{R}^4$, $\vec{u}_2 = (1, 5, 0, 6) \in \mathbb{R}^4$ și $\vec{u}_3 = (-1, 1, 3, 0) \in \mathbb{R}^4$.
Discutați rezultatul obținut. Ce se poate spune despre sistemul de vectori $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$?

5. Se dă sistemul de polinoame: $f_1(t) = 1 - t^2$, $f_2(t) = 1 + t^3$, $f_3(t) = t - t^3$, $f_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$. Să se găsească combinațiile liniare $5f_1 + f_2 - 4f_3$ și $f_1 + 9f_2 - 4f_4$. Discutați rezultatele obținute. Ce se poate spune despre sistemul dat?

TEMA NR. 2

6. Să se arate că sistemul de vectori $S=\{\vec{a}_1=(1,2,5),\ \vec{a}_2=(5,3,1),\ \vec{a}_3=(-15,-2,21)\}\subset \mathbb{R}^3$ este format din vectori liniar dependenți și să se găsească dependența dintre ei.

Indicație Se scrie matricea C de trecere de la baza canonică $\mathcal{B}=\{\vec{e}_1=(1,0,0),\ \vec{e}_2=(0,1,0),\ \vec{e}_3=(0,0,1)\}$ la sistemul S de vectori din $\mathbb{R}^3$. Se arată că rang C = 2.

Răspuns. $\vec{a}_3=5\vec{a}_1-4\vec{a}_2$.

7. Să se arate că sistemele de vectori:

$$S_1=\{\vec{u}_1=(1,1,0),\ \vec{u}_2=(1,-1,-1)\}\subset \mathbb{R}^3;$$
$$S_2=\{\vec{v}_1=(9,-1,-5),\ \vec{v}_2=(7,-1,-4)\}\subset \mathbb{R}^3$$

generează același subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$.

Indicație Subspațiile liniare generate sunt:

$$[S_1]=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \vec{x}=\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2,\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\}$$
$$[S_2]=\{\vec{y}\in\mathbb{R}^3 \mid \vec{y}=\beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2,\ \beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}\}.$$

Cele două subspații coincid dacă și numai dacă din egalitatea $\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2=\beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2$ se poate exprima în mod unic α_1,α_2 în funcție de β_1,β_2 și, de asemenea, β_1,β_2 în funcție de α_1,α_2.

Răspuns. $\begin{cases}\alpha_1=4\beta_1+3\beta_2\\ \alpha_2=5\beta_1+4\beta_2\end{cases}$, $\forall\,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}$, adică $[S_2]\subseteq[S_1]$ și

$\begin{cases}\beta_1=4\alpha_1-3\alpha_2\\ \beta_2=-5\alpha_1+4\alpha_2\end{cases}$, $\forall\,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$, adică $[S_1]\subseteq[S_2]$

Din ale două incluziuni rezultă că $[S_1]=[S_2]$.

TEMA NR. 3

8. Să se arate că în spațiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult 2, sistemele de polinoame $S_1 = \{x, x^2\}$ și $S_2 = \{x + 2x^2, 2x + 5x^2\}$ generează același subspațiu, adică $[S_1] = [S_2]$.

Răspuns. $\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = \beta_1(x + 2x^2) + \beta_2(2x + 5x^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde rezultă

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 + 2\beta_2 \\ \alpha_2 = 2\beta_1 + 5\beta_2 \end{cases} \text{ și reciproc } \begin{cases} \beta_1 = 5\alpha_1 - 2\alpha_2 \\ \beta_2 = -2\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$$

9. Să se studieze liniara dependență a sistemelor de vectori:

1) $\vec{v}_1 = (1, 2, -4)$; $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (1, 4, -2)$;
2) $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{v}_3 = (0, 1, 1)$;
3) $\vec{v}_1 = (2, 1, 3, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 0, 1)$, $\vec{v}_3 = (-1, 1, -3, 0)$.

Răspuns: 1) Liniar dependenți: $\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{0}$;
2) Liniar independenți, deci formează bază în $\mathbb{R}^3$;
3) Liniar dependenți: $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$.

10. Să se studieze liniara dependență a sistemului $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ de vectori din $\mathbb{R}^5$, unde $\vec{v}_1 = (2, 0, 1, 3, -1)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 0, -1, 1)$, $\vec{v}_3 = (0, -2, 1, 5, -3)$ și $\vec{v}_4 = (1, -3, 2, 9, -5)$.

Indicație. Se scrie matricea C de trecere de la baza canonică $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^5$ la sistemul S. Se determină rang C și se găsește rang $C = 2$. Doi dintre vectori sunt liniar independenți, ceilalți fiind combinații liniare de acești doi. Se găsește $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$ și $\vec{v}_4 = 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2$.

paginat 4

TEMA NR. 2

11. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii:
1) $\vec{u}_1 = (1, \alpha, \alpha)$, $u_2 = (\alpha, 1, 2\alpha - 1) \in \mathbb{R}^3$;
2) $\vec{v}_1 = (1, \alpha, \alpha, 1)$, $\vec{v}_2 = (\alpha, 1, \alpha, \alpha)$, $\vec{v}_3 = (1, 1, 1, \alpha) \in \mathbb{R}^4$
să fie liniar independenți.

Indicație. Se scriu matricele de trecere C_1 și C_2 de la baza canonică din $\mathbb{R}^3$ la primul sistem de vectori și respectiv de la baza canonică din $\mathbb{R}^4$ la al doilea sistem. Se impune ca $\text{rang}\, C_1 = 2$ și $\text{rang}\, C_2 = 3$.
Răspuns. 1) $\alpha \neq 1$; 2) $\alpha \neq 1$.

12. Fie mulțimea de matrice
$$V = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$
1) Să se arate că V este subspațiu vectorial al lui $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}$.
2) Să se arate că sistemul $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3\} \subset V$, unde $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este bază în V.
3) Să se găsească coordonatele vectorului $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ în baza $\mathcal{B}$.

Indicație 1) Se consideră $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ și A_1, A_2 din V, elemente oarecare și se arată că $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in V \Rightarrow V$ subspațiu în $M_2(\mathbb{R})$.
2) Se arată că $\mathcal{B}$ este sistem liniar independent și că generează pe V.
3) Se scrie $A = x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3$. Se găsește $A = (3, 4, 1)_{\mathcal{B}}$.

TEMA NR. 2

13. Fie $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ cu $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ baza canonică din $\mathbb{R}^3$ și fie $\mathcal{B}' = \{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ un sistem de trei vectori dați prin

$$\vec{e}\,'_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3,\ \vec{e}\,'_2 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3 \text{ și}$$
$$\vec{e}\,'_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

a) Să se arate că $\mathcal{B}'$ este bază în $\mathbb{R}^3$.

b) Să se găsească coordonatele vectorului $\vec{x} = 6\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3$ în baza $\mathcal{B}'$.

Indicație. a) Scrieți matricea C de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la sistemul $\mathcal{B}'$ de vectori și arătați că C este nesingulară.

b) Matricea coloană X' a coordonatelor vectorului $\vec{x}$ în baza $\mathcal{B}'$ este legată de matricea X a coordonatelor aceluiași vector în baza $\mathcal{B}$ prin relația $X' = C^{-1}X$

Răspuns. a) $\det C = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists\, C^{-1}$. Se găsește că

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $\vec{x} = (1,1,1)_{\mathcal{B}'} = \vec{e}_1\,' + \vec{e}_2\,' + \vec{e}_3\,'$.

14. Să se arate că $\mathcal{B}' = \{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3, \vec{e}\,'_4\}$, unde: $\vec{e}_1\,' = (1,1,1,1)$, $\vec{e}_2\,' = (1,1,-1,1)$, $\vec{e}_3\,' = (1,-1,1,-1)$, $\vec{e}_4\,' = (1,-1,-1,1)$, formează o bază în $\mathbb{R}^4$ și să se determine coordonatele vectorului $\vec{u} = (1,2,1,1) \in \mathbb{R}^4$ în această bază.

Indicație. Se scrie $C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la sistemul de vectori $\mathcal{B}'$. Se arată că C este nesingulară, deci $\mathcal{B}'$ este bază. Pentru coordonate se aplică $U' = C^{-1}U$, unde $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ și $U' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Se găsește $\vec{u} = \left(1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$

15. În spațiul vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideră sistemele de vectori:

$$\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1 = (1,1,0),\ \vec{e}'_2 = (1,0,0);\ \vec{e}'_3 = (1,2,3)\},$$

$$\mathcal{B}'' = \{\vec{e}''_1 = (1,3,3),\ \vec{e}''_2 = (2,2,3),\ \vec{e}''_3 = (6,7,9)\}.$$

1) Să se arate că $\mathcal{B}'$ și $\mathcal{B}''$ sunt baze și să se afle matricea de trecere C de la $\mathcal{B}'$ la $\mathcal{B}''$.

2) Să se găsească coordonatele vectorului $\vec{x} = 2\vec{e}'_1 + 5\vec{e}'_2 + 7\vec{e}'_3$ în baza $\mathcal{B}''$.

Indicație 1) $\mathcal{B} \xrightarrow{C'} \mathcal{B}'$, unde $C' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} \xrightarrow{C''} \mathcal{B}''$, unde $C'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Aici $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^3$. Se arată că C' și C'' sunt matrice nesingulare. Apoi $\mathcal{B}' \xrightarrow{C} \mathcal{B}''$ și se vede că $C = (C')^{-1} C''$.

2) Se aplică legea de schimbare a coordonatelor unui vector la o schimbare a bazei.

Răspuns. 1) $\det C' \neq 0$, $\det C'' \neq 0$;

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) $X'' = C^{-1} X' =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$ Prin urmare

$$\vec{x} = \vec{e}''_2 + 2\vec{e}''_3.$$

16. Fie $\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'_4\}$, unde $\vec{e}'_1 = (1,2,-1,-2)$, $\vec{e}'_2 = (2,3,0,1)$, $\vec{e}'_3 = (1,2,1,3)$, $\vec{e}'_4 = (1,3,-1,0)$.

Arătați că $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^4$ este bază și găsiți coordonatele vectorului $\vec{x} = (1,1,1,1)$ în baza $\mathcal{B}'$.

Răspuns. Se arată că matricea de trecere C este nesingulară. Pentru coordonate se aplică relația $X' = C^{-1} X$. Se găsește $\vec{x} = (1,0,1,-1)_{\mathcal{B}'}$